Wstęp do logiki

Klasyczny Rachunek Zdań III

Przypomnijmy: Logika: = Teoria form (schematów, reguł) poprawnych wnioskowań.

Wnioskowaniem nazywamy jakąkolwiek skończoną – co najmniej dwuwyrazową – sekwencję zdań, z których ostatnie jest wnioskiem, a wcześniejsze są przesłankami. Wnioskowanie nazywamy formalnie poprawnym lub dedukcyjnym wtw jego schematem jest niezawodna reguła wnioskowania, czyli taka która od przesłanek prawdziwych prowadzi zawsze do prawdziwego wniosku. Ogólnie mówiąc, przez regułę wnioskowania rozumie się instrukcję stwierdzającą z jakiego rodzaju zdań jako przesłanek, jakie zdanie można otrzymać jako wniosek. Przy tym instrukcja ta podaje na ogół tylko strukturę owych zdań, nie wnikając w ich treść.

Reguły wnioskowania zwykle notuje się w postaci ułamkowej:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{B},$$

gdzie A_1, ..., A_n oraz B są dowolnymi formułami KRZ. Formuły A_1, ..., A_n interpretujemy jako schematy przesłanek, a formułę B jako schemat wniosku.

Przykład.

Substancja *s* jest kwasem lub zasadą.

Jeżeli substancja *s* jest kwasem, to barwi papierek lakmusowy na czerwono.

Jednak substancja *s* nie barwi papierka lakmusowego na czerwono.

A zatem: Substancja *s* jest zasadą.

Reguła:
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \sim r \\ \hline q \end{array}$$

Pozostaje sprawdzić, czy podana reguła jest niezawodna. ■

Formalnie:

DEF. 7 (Reguła wnioskowania). Regułą (schematem) wnioskowania nazywamy dowolny skończony, co najmniej dwuwyrazowy ciąg formuł języka KRZ. Ostatnią formułę nazywamy schematem wniosku, a formuły wcześniejsze schematami przesłanek.

Przykłady.

$$\frac{p,\ q}{p \wedge q}\ , \qquad \frac{p \equiv \sim q,\ \sim p \equiv q}{(p \equiv \sim q) \wedge (\sim p \equiv q)}\ , \qquad \frac{p \rightarrow q,\ p}{q}$$

Zauważmy, że dwie pierwsze reguły można potraktować jako szczególne przypadki reguły o schemacie

$$\frac{A,\ B}{A \wedge B}$$

Powstają one z tego schematu w wyniku wstawienia za (metazmienne) A i B pewnych konkretnych formuł języka KRZ. Owe schematy reguł też będziemy nazywać regułami. ■

DEF. 8 (Reguła niezawodna). Reguła wnioskowania $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{B}$ jest niezawodna na gruncie KRZ wtw implikacja

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$$

jest tautologią KRZ (również implikacja: $A_1 \rightarrow [A_2 \rightarrow \ldots (A_n \rightarrow B)]$).

W przeciwnym przypadku jest ona zawodna.

Alternatywnie (z uwagi na definicję wynikanie logicznego):

DEF 8a. Reguła wnioskowania $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{B}$ jest niezawodna (na gruncie KRZ) wtw wniosek B wynika logicznie z przesłanek $A_1, \ldots, A_n$ (na gruncie KRZ).

A zatem, na każdej tautologii (o postaci implikacji) można oprzeć pewną niezawodną regułę wnioskowania.

Przykłady.

Reguła	Prawo	
$\dfrac{p \to q,\ p}{q}$	$(p \to q) \wedge p \to q$	*modus ponendo ponens*
$\dfrac{p \to q,\ \sim q}{\sim p}$	$(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$	*modus tollendo tollens*
$\dfrac{p \wedge q}{p}$	$(p \wedge q) \to p$	pr. symplifikacji
$\dfrac{p \to q,\ q \to r}{p \to r}$	$(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$	pr. sylogizmu hipotetycznego
$\dfrac{p, \sim p}{q}$	$p \to (\sim p \to q)$	pr. przepełnienia ■

Łatwo można sprawdzić prawdziwość następującego twierdzenia:

Twierdzenie. Jeśli reguła $\frac{A_1, ..., A_n}{B}$ jest niezawodna, a formuły A_1, ..., A_n uzyskują wartość 1, to formuła B też uzyskuje wartość 1.

Dowód. Załóżmy, że reguła $\frac{A_1, ..., A_n}{B}$ jest niezawodna, a formuły A_1, ..., A_n uzyskują wartość 1, zaś dla dowodu nie wprost załóżmy, że formuła B uzyskuje wartość 0. Wtedy implikacja

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$$

uzyskuje wartość 0 (bo poprzednik uzyskuje wartość 1, a następnik wartość 0), czyli nie jest tautologią KRZ. W takim razie – z uwagi na DEF. 8 – reguła $\frac{A_1, ..., A_n}{B}$ (oparta na tej implikacji) jest zawodna, wbrew temu, co założyliśmy na początku. ■

Konsekwencja tego twierdzenia jest stwierdzenie, że jeśli wnioskowanie opiera się na regule niezawodnej, a przesłanki tego wnioskowania są prawdziwe, to wniosek też będzie prawdziwy; krótko: wnioskowanie jest niezawodne (zachowuje prawdziwość).

DEF. 9 (Dedukcja). Dedukcją nazywa się wnioskowanie oparte na jakieś regule niezawodnej, czyli takie, w którym wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Logika daje narzędzie do kontroli niezawodności wnioskowań, przede wszystkim dedukcyjnych. Wystarczy sprawdzić, czy wnioskowanie opiera się na regule niezawodnej. Jeżeli wnioskowanie dedukcyjne nie opiera się na takiej regule, to mówimy, że popełniono błąd formalny.