Wstęp do logiki

Klasyczny Rachunek Predykatów III

Formuły języka KRP same przez się nie mają żadnej treści. Co bowiem może znaczyć napis np.

$$\forall x \forall y[R(x, y) \rightarrow {\sim}R(y, x)].$$

Gdybyśmy ustalili, że występujące w niej zmienne przebiegają zbiór ludzi, a symbol R odczytali jako predykat „jest ojcem”, to wówczas formuła ta nabrałaby treści. Lecz oczywiście nic nie nakazuje nam takiego właśnie sposobu odczytania symbolu R. Równie dobrze można przyjąć, że zmienne przebiegają zbiór liczb naturalnych lub zbiór momentów czasu, a symbol R można odczytywać jako „jest mniejsze”, „jest późniejsze” itd. Tak więc, o danej formule możemy powiedzieć, że reprezentuje ona różne zdania (a nawet nieskończenie wiele zdań). Jedne z nich będą prawdziwe inne zaś fałszywe. Gdy formuła reprezentuje wyłącznie zdania prawdziwe nazywamy ją logicznie prawdziwą lub tautologią, gdy zaś reprezentuje zdania wyłącznie fałszywe nazywamy ją logicznie fałszywą lub kontrtautologią.

DEF. 11 (Tautologia). Formuła *A* jest tautologią KRP (albo prawem KRP) wtw jest ona prawdziwa przy dowolnym rozumieniu, czyli interpretacji, występujących w niej zmiennych indywiduowych i stałych pozalogicznych (tj. symboli relacyjnych, symboli funkcyjnych i stałych indywiduowych).

Inaczej niż KRZ ze swoją metodą 0-1, KRP jest nierozstrzygalny, tzn. nie istnieje żadna prosta, mechaniczna, efektywna metoda pozwalająca orzekać o dowolnej formule języka KRP, czy jest ona tautologią , czy też nie. Fakt ten udowodnił A. Church w roku 1936.
Można jednak zaksjomatyzować KRP i udowodnić, że z podanego zbioru tautologii jako aksjomatów da się wyprowadzić wszystkie i tylko tautologie KRP. Ujęcia aksjomatyczne KRP są przedstawiane we wszystkich bardziej zaawansowanych podręcznikach logiki.

Analogicznie jak w przypadku KRZ możemy zdefiniować pojęcia wynikania logicznego (konsekwencji semantycznej), reguły wnioskowania niezawodnej i dedukcji.

DEF. 12 (Wynikanie logiczne – koncepcja implikacyjna).

Ze zdań A_1, … A_n wynika logicznie zdanie B (na gruncie KRP) wtw implikacja

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$$

jest tautologią KRP.

Bardziej ogólna jest następująca definicja (obejmuje ona przypadek, gdy A_1, … A_n i B nie są zdaniami):

DEF. 13 (Wynikanie logiczne – koncepcja semantyczna). Z formuł A_1, … A_n wynika logicznie formuła B wtw B jest prawdziwa przy każdej interpretacji, przy której prawdziwe są wszystkie formuły A_1, … A_n.

Dygresja. Pojęcie wynikania logicznego możemy odnieść również do zdań języka naturalnego. Mianowicie powiemy, że ze zdań o schematach A_1, …, A_n wynika logicznie zdanie o schemacie B wtw implikacja $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ jest tautologią KRP. ■

DEF. 14 (Reguła wnioskowania). Regułą (schematem) wnioskowania nazywamy dowolny skończony, co najmniej dwuwyrazowy ciąg formuł języka KRP. Ostatnią formułę nazywamy schematem wniosku, a formuły wcześniejsze schematami przesłanek.

DEF. 15 (Reguła niezawodna). Reguła $\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$ jest niezawodna na gruncie KRP wtw implikacja

$$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$$

jest tautologią KRP. W przeciwnym przypadku jest ona zawodna.

Alternatywnie (z uwagi na definicję wynikania logicznego):

DEF. 13a. Reguła $\frac{A_1, \ldots, A_n}{B}$ jest niezawodna (na gruncie KRP) wtw wniosek B wynika logicznie z przesłanek $A_1, \ldots, A_n$ (na gruncie KRP).

A zatem, na każdej tautologii (o postaci implikacji) można oprzeć pewną niezawodną regułę wnioskowania.

Przykłady.

Reguła	Prawo	
$\dfrac{\forall x(A)}{A(x/a)}$	$\forall x\, A(x) \rightarrow A(x/a)$	*dictum de omni*
$\dfrac{A(x/a)}{\exists x(A)}$	$A(x/a) \rightarrow \exists x\, A(x)$	*dictum de singulo*
$\dfrac{\sim \exists x(A)}{\forall x \sim (A)}$	$\sim\exists x(A) \rightarrow \forall x \sim(A)$	pr. De Morgana
$\dfrac{\exists x \forall y A(x,y)}{\forall y \exists x A(x,y)}$	$\exists x \forall y\, A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x\, A(x, y)$	pr. przestawiania $\exists$ z $\forall$
$\dfrac{\forall x(A \rightarrow B)}{\forall x(A) \rightarrow \forall x(B)}$	$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x(A) \rightarrow \forall x(B))$	pr. rozkładania $\forall$ ■

DEF. 16 (Dedukcja). Dedukcją nazywa się wnioskowanie oparte na jakieś regule niezawodnej, czyli takie, w którym wniosek wynika logicznie z przesłanek.