

# Wstęp do logiki

Semiotyka cd.

Ujęcia języka proponowane przez językoznawców i logików różnią się istotnie w wielu punktach. Z punktu widzenia logiki każdy język można scharakteryzować przez trzy rodzaje reguł:

- **reguły słownikowe**, które wyróżniają słownik danego języka, czyli zbiór wyrażeń strukturalnie prostych, tzn. takich których nie można już rozłożyć na części;
- **reguły składniowe** (inaczej: **reguły gramatyczne**), będące przepisami na konstrukcje wyrażeń złożonych danego języka, czyli zasady budowy wyrażeń złożonych;
- **reguły znaczeniowe** (inaczej: **reguły semantyczne**), będące przepisami jak można przyporządkować znaczenia poszczególnym wyrażeniom – zarówno prostym, jak i złożonym (**znaczenie wyrażenia** to – ogólnie mówiąc – sposób jego rozumienia lub jego odniesienie przedmiotowe).

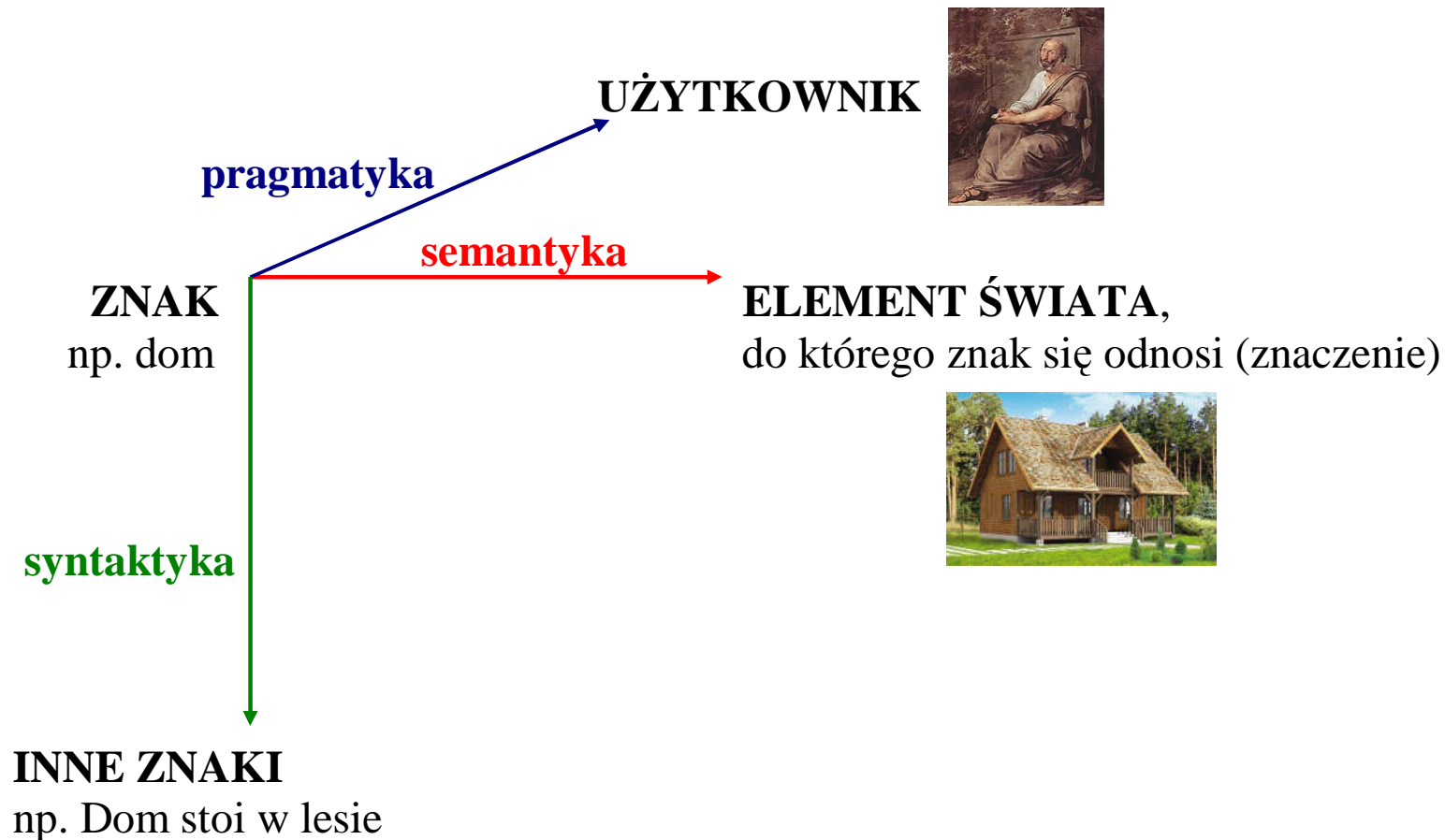
Tak rozumiany język możemy badać z trzech różnych perspektyw, szukając odpowiedzi na następujące pytania:

- Jak wyrażenia są zbudowane?
- Co one znaczą?
- Jak są one używane?

Te trzy perspektywy wyznaczają trzy komponenty refleksji nad językiem (semiotyki):

- **syntaktykę** (**składnię, gramatykę**), dotyczącą struktury znaków i związków między znakami z uwagi na ich kształt;
- **semantykę**, dotyczącą związków między znakami a ich znaczeniami;
- **pragmatykę**, dotyczącą związków między znakami a ich użytkownikami.

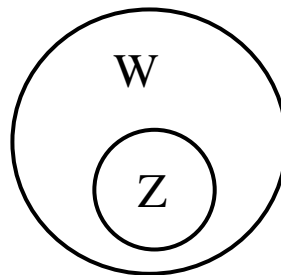
Wymienione związki można zilustrować przy pomocy tzw. **kostki semiotycznej**:



Rozważane w logice języki mają charakter języków sformalizowanych. **Język sformalizowany** to język w pewien szczególny sposób opisany, tj. spełniający określone postulaty efektywności. Konstruując taki język rozpoczynamy od ustalenia jego słownika, do którego zaliczamy wszystkie znaki jakimi kiedykolwiek się posłużymy w tym języku. Wyrażenia definiujemy jako dowolne skończone ciągi postaci

$$w = \langle z_1 \dots z_n \rangle,$$

złożone jedynie z elementów słownika. Wyróżniamy następnie spośród ogółu wyrażeń (W) te wyrażenia, którymi zamierzamy posługiwać się jako zdaniami (Z).



Zakładamy, że zbiór zdań (ogólniej: formuł zdaniowych) jest **nieskończony**, ale **rozstrzygalny**.

**Dygresja.** Rozstrzygalność oznacza, że dla dowolnego wyrażenia w rozważanego języka istnieje procedura efektywna pozwalająca stwierdzić w skończonej liczbie „z góry” określonych kroków, czy należy ono do zbioru zdań, czy nie należy. W ujęciu nietechnicznym, procedura efektywna to zbiór instrukcji, dostarczających „mechanicznych” środków, dzięki którym w skończonej liczbie prostych kroków można otrzymać odpowiedź na każde pytanie należące do danej klasy pytań (np. pytanie: Czy dana liczba jest parzysta?). ■

**Przykład.** Język  $J$  określamy następująco:

**Słownik:**  $\Delta \square$ ;

**Wyrażenia:** Każdy skończony ciąg symboli ze słownika języka  $J$  jest wyrażeniem; np.

$\Delta\Delta\square\Delta\square$ ,  $\square\Delta\square\square\Delta$ .

**Zdania:** Każdy skończony ciąg symboli ze słownika języka  $J$  zaczynający się od „ $\Delta$ ” jest zdaniem w tym języku. Nic poza tym nie jest zdaniem w  $J$ .

Mając język sformalizowany, możemy następnie zbudować w nim pewien **system sformalizowany** (teorię formalną). W tym celu z ogółu zdań wyróżniamy pewne zdania jako **aksjomaty** oraz wyróżniamy tzw. **reguły inferencji**, które czynią prawomocnym wywodzenie jednych zdań z innych.

Aksjomat:  $\Delta \square \square \square$ ;

Reg. inf.: Każde zdanie w  $J$ , którego ostatnimi symbolami są kolejno „ $\Delta$ ” i „ $\square$ ” jest bezpośrednią konsekwencją dowolnego zdania, którego dwoma pierwszymi symbolami są „ $\Delta$ ” i „ $\square$ ”; schematycznie:

$$\frac{\Delta \square \dots}{\Delta \dots \Delta \square} \quad \begin{array}{l} \text{(przesłanka)} \\ \text{(wniosek)} \end{array}$$

Zauważmy, że  $\Delta \square \square \square \Delta \square$  jest bezpośrednią konsekwencją aksjomatu, natomiast aksjomat nie jest bezpośrednią konsekwencją żadnego zdania (bo nie kończy się symbolami „ $\Delta$ ” i „ $\square$ ”). ■

Języki sformalizowane dane są przez swój opis strukturalny. Odróżniać więc będziemy tu język, będący przedmiotem rozważań, tzw. **język przedmiotowy**, od języka, w którym opisujemy język przedmiotowy, tzw. **metajęzyk**. Z rozróżnieniem tym wiąże się odróżnienie wyrażień, które są użyte od tych, które są wymienione.

- (1) **Lód to zamrożona woda.** [zdanie prawdziwe]  
 (2) **Lód składa się z trzech liter.** [zdanie fałszywe]

Lód jako substancja chemiczna nie ma żadnych liter. Litery występują w słowie „lód”, będącym nazwą owej substancji. Prawidłowa wersja zdania (2) ma więc postać:

- (3) **„Lód” składa się z trzech liter.**

O słowie „lód” występującym w (1) mówimy, że jest **użyte**; o słowie „lód” występującym w (3) mówimy, że jest **wymienione**. Jednym ze sposobów wskazywania, że wyrażenie jest wymienione jest umieszczenie go w cudzysłowie.



Ćwiczenie. Zanalizuj w podobny sposób zdanie: **Człowiek jest rodzaju męskiego.** ■

Z pojęciami użycia i wymieniania wyrażeń wiąże się wspomniane odróżnienie stopni języka. Mając jakiś język  $J$  możemy chcieć go badać, wygłaszać o nim twierdzenia itp. Musimy więc dysponować językiem, który nam to umożliwi.

Język będący przedmiotem naszych rozważań nazywamy **językiem przedmiotowym**.

Język, w którym mówimy coś o języku przedmiotowym nazywamy **metajęzykiem** (jest on o stopień wyższy od języka przedmiotowego).

Wyrażenie:


$$(*) \quad 2 + 2 = 4$$

jest zdaniem języka arytmetyki, podczas gdy

$$(**) \quad „2 + 2 = 4” \text{ jest zdaniem języka arytmetyki}$$

jest zdaniem o zdaniu (\*). Nie należy więc ono do języka arytmetyki, lecz do jego metajęzyka.

Metajęzyk oprócz nazw wyrażen języka przedmiotowego i terminów ogólnologicznych zawiera dodatkowo pewne specyficzne wyrażenia odnoszące się do własności wyrażen języka przedmiotowego i związków między nimi.

<b>Świat zewnętrzny</b>	<b>Język przedmiotowy</b>	<b>Metajęzyk</b>
	Filomon ←	„Filemon” „Filemon śpi”
	Filemon śpi ←	„Filemon” jest nazwą własną. „Filemon śpi” jest zdaniem prawdziwym.

Dygresja. Z rozróżnieniem na język przedmiotowy i metajęzyk związana jest słynna **antynomia kłamcy** (znana już w starożytności).

**Antynomią** nazywa się rozumowanie, w którym bez popełnienia zwykłego błędu logicznego uzasadnia się dwa zdania wzajemnie sprzeczne.

Rozważmy zdanie:

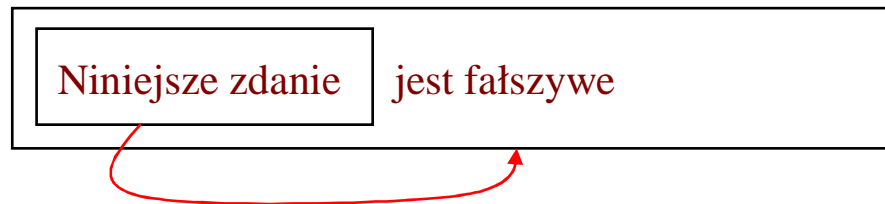
K.        **K jest fałszywe**                      [wersja potoczna: **Niniejsze zdanie jest fałszywe.**]

Przyjmujemy następnie dwie umowy:

(1)  $K = \text{„}K \text{ jest fałszywe”}$

(2) „ $p$ ” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$

Z uwagi na umowę (1) litera K jest skrótem nazwy cudzysłowowej „K jest fałszywe”. W efekcie, rozważane zdanie jest samoodnośne. Ponieważ jego podmiot oznacza samo to zdanie, stwierdza więc ono o sobie samym (tylko), że jest fałszywe. Ilustruje to diagram:



Umowa (2) wyraża ideę: zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest tak, jak ono głosi;  
np.

„Sokrates tańczy” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Sokrates tańczy.

Czy zdanie K jest prawdziwe?

Zastosowanie (2) do zdania K daje:

„K jest fałszywe” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy K jest fałszywe.

Wykorzystując teraz umowę (1) otrzymujemy zdanie wewnętrznie sprzeczne:

K jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy K jest fałszywe.

Od czasu powstania antynomii kłamcy (tj. ok. IV w. p.n.e.) filozofowie i logicy zastanawiają się nad jej źródłem i sposobem rozwiązania. Jedną z dróg wiedzy do ujawnienia ukrytej przesłanki głoszącej, że **wyrażenie K jest pełnoprawnym zdaniem**, a następnie jej odrzucenia. Z tej perspektywy, źródłem antynomii kłamcy jest pomieszanie języka przedmiotowego z metajęzykiem. Terminy semantyczne „prawdziwe” i „fałszywe” dotyczące zdań danego języka nie należą do tego języka, ale do jego metajęzyka. Z tego powodu zasadę występującą w umowie (2) należy ograniczyć tylko do zdań języka przedmiotowego (czyli takich, w których nie występują terminy semantyczne „prawdziwy” lub „fałszywy”). ■

Ćwiczenia. (1) Wstaw w miejsce  $x$  jedną z następujących nazw tak, aby utworzyć zdanie prawdziwe: „„0””, „0”, 0.

$x$  jest nazwa cudzośćlowową.

$x$  jest cyfrą o owalnym kształcie

$x$  jest liczbą naturalną.

(2) Wyjaśnij mechanizm powstania poniższej aporii (Chryzyp z Soloi):

Cokolwiek mówisz przechodzi przez twoje usta. Mówisz: Wóz.

A zatem, wóz przechodzi przez twoje usta.

(Aporia – problem trudny do rozwiązania.) ■

