Wstęp do logiki

Klasyczny Rachunek Zdań I

UWAGA: W sposób precyzyjny i systematyczny Klasyczny Rachunek Zdań oraz Klasyczny Rachunek Predykatów zostaną przedstawione podczas wykładów późniejszych: „Logika formalna” i „Semantyka logiczna”.

Języki sformalizowane wraz z określoną w nich relacją wynikania (zwaną bardziej technicznie relacją konsekwencji) nazywamy rachunkami logicznymi. Najprostszymi rozważanymi w logice rachunkami są tzw. rachunki zdaniowe. Dostarczają one zasad wnioskowań logicznie poprawnych odwołujących się wyłącznie do struktury zdań złożonych, nie wnikając w budowę zdań prostych – składników zdań złożonych.

Język J nazywamy językiem zdaniowym (lub językiem rzędu zerowego), gdy ma on następujące własności:

- słownik jego zawiera: (a) nieskończenie wiele zmiennych zdaniowych (są to symbole literowe reprezentujące zdania); (b) skończoną liczbę spójników; (c) nawiasy (pełnią one rolę znaków interpunkcyjnych zapewniając formułom jednoznaczność);
- formułami są te ciągi znaków ze słownika języka J, które są schematami zdań jakiegoś języka, np. polskiego.

Schematem będziemy nazywać wyrażenie zawierające zmienne. Przez schemat zdaniowy rozumiemy taki schemat, z którego przy wszystkich prawidłowych podstawieniach za zmienne zdaniowe powstają zdania. A zatem, schemat zdaniowy to coś zbliżonego do formularza zawierającego rubryki do wypełnienia. Taki formularz ma postać:

(*) Jeżeli *p* lub *q*, to *r* i *s*

Litery *p*, *q*, *r*, *s* to zmienne zdaniowe. Podstawienie jest prawidłowe, gdy za zmienne zdaniowe zostały podstawione tylko i wyłącznie wyrażenia zdaniowe, przy czym za takie same zmienne podstawiono to samo wyrażenie zdaniowe i podstawienia dokonano na wszystkich miejscach wystąpienia danej zmiennej.

Ze schematu (*) otrzymujemy np. zdanie

Jeżeli Iksiński pozna Bimbalskiego lub zaprzyjaźni się z Trąbalskim, to wygra przetarg i dostanie pożyczkę z banku.

Przykładem języka zdaniowego jest język Klasycznego Rachunku Zdań (KRZ). Słownik tego języka oprócz zmiennych zdaniowych i nawiasów zawiera wyłącznie spójniki ekstensjonalne:

~ negacja

Konstrukcja negacji polega na poprzedzeniu formuły *A* symbolem ~: ~(*A*); symbol ów czytamy: nieprawda, że (nie jest tak, że lub nie);

Zakładamy, że spójnik negacji ma następujące znaczenie: jeśli *A* jest prawdziwe, to ~(*A*) jest fałszywe i odwrotnie.

A	$\sim(A)$
1	0
0	1

$\wedge$ koniunkcja

Konstrukcja koniunkcji polega na połączeniu dwóch formuł A, B – zwanych czynnikami - symbolem $\wedge$: $(A) \wedge (B)$; symbol ów czytamy: i (oraz, a, ale).

Zakładamy, że spójnik koniunkcji ma następujące znaczenie: koniunkcja formuł A, B jest prawdziwa, gdy oba czynniki są prawdziwe, a fałszywa, gdy co najmniej jeden z czynników jest fałszywy.

A	B	$(A) \wedge (B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Jeżeli zdanie o postaci koniunkcji $(A) \wedge (B)$ jest fałszywe i jeden jej czynnik jest prawdziwy, to drugi musi być fałszywy.

Zagadki. Pewną wyspę zamieszkują tylko rycerze i łotry. Rycerze zawsze mówią prawdę, zaś łotry zawsze kłamią.

1. Załóżmy że osoba X mówi: Jestem łotrem, ale Y nie jest łotrem. Kim są X i Y?
2. Pewien badacz dotarł do grupy wysp. Na pierwszej, jaką badał, spotkał dwóch tubylców, X i Y, którzy wygłosili następujące zdania:

   X: Y jest rycerzem, a to jest wyspa Maja.

   Y: X jest łotrem, a to jest wyspa Maja.

   Czy badaną wyspą jest faktycznie wyspa Maja? ■

$\vee$ alternatywa

Konstrukcja alternatywy polega na połączeniu dwóch formuł A, B – zwanych składnikami – symbolem $\vee$: $(A) \vee (B)$; symbol ów czytamy: lub.

Zakładamy, że spójnik alternatywy ma następujące znaczenie: alternatywa formuł A, B jest fałszywa, gdy oba składniki fałszywe, a prawdziwa, gdy co najmniej jeden składnik jest prawdziwy.

A	B	$(A) \vee (B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Jeżeli zdanie o postaci alternatywy $(A) \vee (B)$ jest prawdziwe i jeden jej składnik jest fałszywy, to drugi musi być prawdziwy.

Dygresja. W mowie potocznej spójnika alternatywy używa się też w innym sensie, tzw. wykluczającym – takim mianowicie, że alternatywa zdań jest prawdziwa, gdy składniki mają różne wartości logiczne. Np. jeśli mówię Ożenię się z Anną lub Ewą, rozumiemy to w ten sposób, że te dwie możliwości wykluczają się nawzajem tzn. nie poślubię obu dziewcząt, tylko jedną z nich, albo Annę, albo Ewę. ■

Zagadki. Założenia jak wcześniej.

Tym razem osoba X mówi: Jestem łotrem lub Y jest rycerzem. Kim są X i Y? ■

$\rightarrow$ implikacja

Konstrukcja implikacji polega na połączeniu dwóch formuł *A*, *B* – zwanych poprzednikiem i następnikiem – symbolem $\rightarrow$: $(A) \rightarrow (B)$; symbol ów czytamy: jeżeli..., to... (jeśli..., to..., o ile..., to...). Zdania postaci:

Jeżeli ⟨poprzednik⟩, to ⟨następnik⟩

zwie się zdaniami warunkowymi.

Spójnik implikacji ma następujące znaczenie: implikacja formuł *A*, *B* jest fałszywa, gdy poprzednik *A* jest prawdziwy, a następnik *B* jest fałszywy. W pozostałych przypadkach jest prawdziwa.

A	B	$(A) \rightarrow (B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Jeżeli implikacja jest prawdziwa i następnik jest fałszywy, to poprzednik też musi być fałszywy.

Dygresja. Pewne zastrzeżenia może budzić przypadek, gdy zarówno poprzednik, jak i następnik są fałszywe. Implikacja jest wówczas prawdziwa. Rozważmy zdanie warunkowe:

Jeżeli Konfucjusz urodził się w Kalifornii, to jestem synem bezdzietnej matki.

Ponieważ następnik jest jawnie fałszywy, wypowiadający to zdanie chce zakomunikować – mówiąc prawdę - iż poprzednik jest też fałszywy. Zdanie to ma znaczyć, że nie jest tak, iż Konfucjusz urodził się w Kalifornii, a ja nie jestem synem bezdzietnej matki. Ogólnie: zdanie postaci $(A) \rightarrow (B)$ znaczy tyle, że nie jest tak, iż A jest prawdziwe, a B fałszywe; albo: zdanie A jest fałszywe lub B jest prawdziwe. ■

Dygresja. Często własności implikacji utożsamia się z własnościami relacji wynikania. Przyjmuje się bowiem, że ze zdania A wynika zdanie B, gdy implikacja $(A) \rightarrow (B)$ jest prawdziwa. Relacja wynikania, o której tu mowa, różni się od relacji wynikania logicznego (jest słabsza). ■

Zagadki. Założenia jak poprzednio.

1. Mamy dwóch ludzi, X, Y, z których każdy jest rycerzem lub łotrem. X wygłasza zdanie: Jeśli jestem rycerzem, to jest nim też Y. Czy można określić, kim są X i Y?

2. Ktoś pyta X-a: Czy jesteś rycerzem? Ten odpowiada: Jeśli jestem rycerzem, to zjem swój kapelusz. Wykaż, że X powinien zjeść swój kapelusz.

3. X mówi: Jeśli Y jest rycerzem, to ja jestem łotrem. Kim są X i Y?

4. Z trzema mieszkańcami wyspy, X, Y i Z, przeprowadzono wywiad.

   X wypowiedział zdanie: Y jest rycerzem.

   Z kolei, Y wypowiedział zdanie: Jeśli X jest rycerzem to Z jest nim również.

   Czy można określić, kim są X, Y i Z?

5. X jest rycerzem lub łotrem i wygłasza następujące dwa zdania: (1) Kocham Ewę, (2) Jeśli kocham Ewę, to kocham Kasię. Czy X jest rycerzem, czy łotrem? ■

$\equiv$ równoważność

Konstrukcja równoważności polega na połączeniu dwóch formuł *A*, *B* – zwanych członami - symbolem $\equiv$: $(A) \equiv (B)$; symbol ów czytamy: wtedy i tylko wtedy, gdy (zawsze i tylko, gdy, wówczas, gdy).

Spójnik równoważności ma następujące znaczenie: równoważność formuł *A*, *B* jest prawdziwa, gdy oba człony *A*, *B* mają tę samą wartość logiczną, tj. oba są zarazem prawdziwe, albo oba są zarazem fałszywe.

A	B	$(A) \equiv (B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Każde zdanie równoważne zdaniu prawdziwemu (fałszywemu) jest prawdziwe (fałszywe).

Zagadka. Założenia jak poprzednio.

Na wyspie zamieszkałej przez rycerzy i łotrów rozeszła się pogłoska, że zakopano na niej złoto.

Przybysz pyta jednego z tubylców, X, czy jest na niej złoto i otrzymuje odpowiedź:

Na tej wyspie jest złoto wtedy i tylko wtedy, gdy ja jestem rycerzem.

Czy można ustalić, kim jest X? Czy można ustalić, czy na tej wyspie jest złoto? ■

Dygresja (Warunek dostateczny i konieczny). Formułując twierdzenia i uzasadnienia używa się często pojęć warunku dostatecznego (wystarczającego) i warunku koniecznego.

DEF. Niech prawdziwe będzie zdanie warunkowe:

Jeżeli *p*, to *q*.

Wówczas to, o czym mówi zdanie *p*, jest warunkiem wystarczającym dla tego, o czym mówi zdanie *q*, a to, o czym mówi zdanie *q* jest warunkiem koniecznym dla tego, o czym mówi zdanie *p*. Mówi się wtedy skrótowo, że *p* jest warunkiem dostatecznym dla *q*, a *q* jest warunkiem koniecznym dla *p*.

Warunek konieczny (łac. *conditio sina qua non* – warunek bez którego nie) znaczy: gdyby *q* nie było prawdą, to i *p* nie byłoby prawdą.

Przykład. Ponieważ prawdziwe jest zdanie warunkowe: Jeżeli Zenek jest adwokatem, to jest prawnikiem, więc bycie adwokatem jest warunkiem wystarczającym bycia prawnikiem, a bycie prawnikiem jest warunkiem koniecznym bycia adwokatem. ■

Jeśli prawdziwa jest równoważność:

$$p \text{ wtw } q,$$

to q jest zarazem warunkiem wystarczającym i koniecznym dla p.

Przykład. Liczba n jest podzielna przez 9 wtw $\underbrace{\text{suma cyfr liczby } n \text{ jest podzielna przez 9.}}_{\text{warunek zarazem wystarczający i konieczny}}$

Uzasadniając twierdzenie postaci równoważności „A wtw B" pisze się na przykład:

- Warunek dostateczny: pokażemy, że A pociąga (implikuje) B.
- Warunek konieczny: pokażemy teraz, że B pociąga (implikuje) A. ■