

Wstęp do logiki

Klasyczny Rachunek Zdań II

DEF. 1 (Słownik). Następujące znaki tworzą **słownik** języka KRZ:

p_1, p_2, p_3, \dots (zmiennne zdaniowe)

$\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$ (spójniki)

$), ($ (nawiasy).

DEF. 2 (Wyrażenie). **Wyrażeniem** języka KRZ jest każdy skończony ciąg znaków ze słownika języka KRZ.

Wyrażenia poprawnie zbudowane („sensowne”) języka KRZ nazywamy **formułami** (zdaniowymi).

DEF. 3 (Formuła).

- (1) Każda zmienna zdaniowa jest formułą języka KRZ.
- (2) Jeżeli A, B są formułami języka KRZ, to wyrażenia:
 $\sim(A), (A) \wedge (B), (A) \vee (B), (A) \rightarrow (B), (A) \equiv (B)$
są także formułami języka KRZ.
- (3) Nie ma innych formuł języka KRZ poza zmiennymi zdaniowymi i takimi formułami, które powstają dzięki zastosowaniu reguły (2).

Notacja: 1. Dla uproszczenia zamiast p_1 będziemy pisać niekiedy po prostu p , zamiast $p_2 - q$, zamiast $p_3 - r$, zamiast $p_4 - s$.

2. Pojedynczej zmiennej nie bierzemy w nawiasy. Nie dodaje się nawiasu, gdy umieszcza się znak negacji przed formułą już poprzedzoną znakiem negacji; tj. zamiast $\sim(\sim(A))$ pisze się $\sim\sim(A)$. Nie dodaje się nowego nawiasu, dodając nowy człon koniunkcji (alternatywy) do formuły będącej koniunkcją (alternatywą); tj.

pisze się $(A) \wedge (B) \wedge (C)$ zamiast $((A) \wedge (B)) \wedge (C)$ i zamiast $(A) \wedge ((B) \wedge (C))$.

3. Spójnik \sim wiąże najsilniej. Spójniki \wedge i \vee wiążą silniej niż spójniki \rightarrow i \equiv ; np.

zamiast $(\sim(p) \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim(s))$ wolno pisać: $\sim p \wedge q \rightarrow r \vee \sim s$. ■

Przykłady: **Formułami są:** p , $\sim p$, $\sim\sim p$, $p \wedge \sim q$, $\sim(p \rightarrow \sim q)$, $p \wedge q \rightarrow \sim\sim p$.

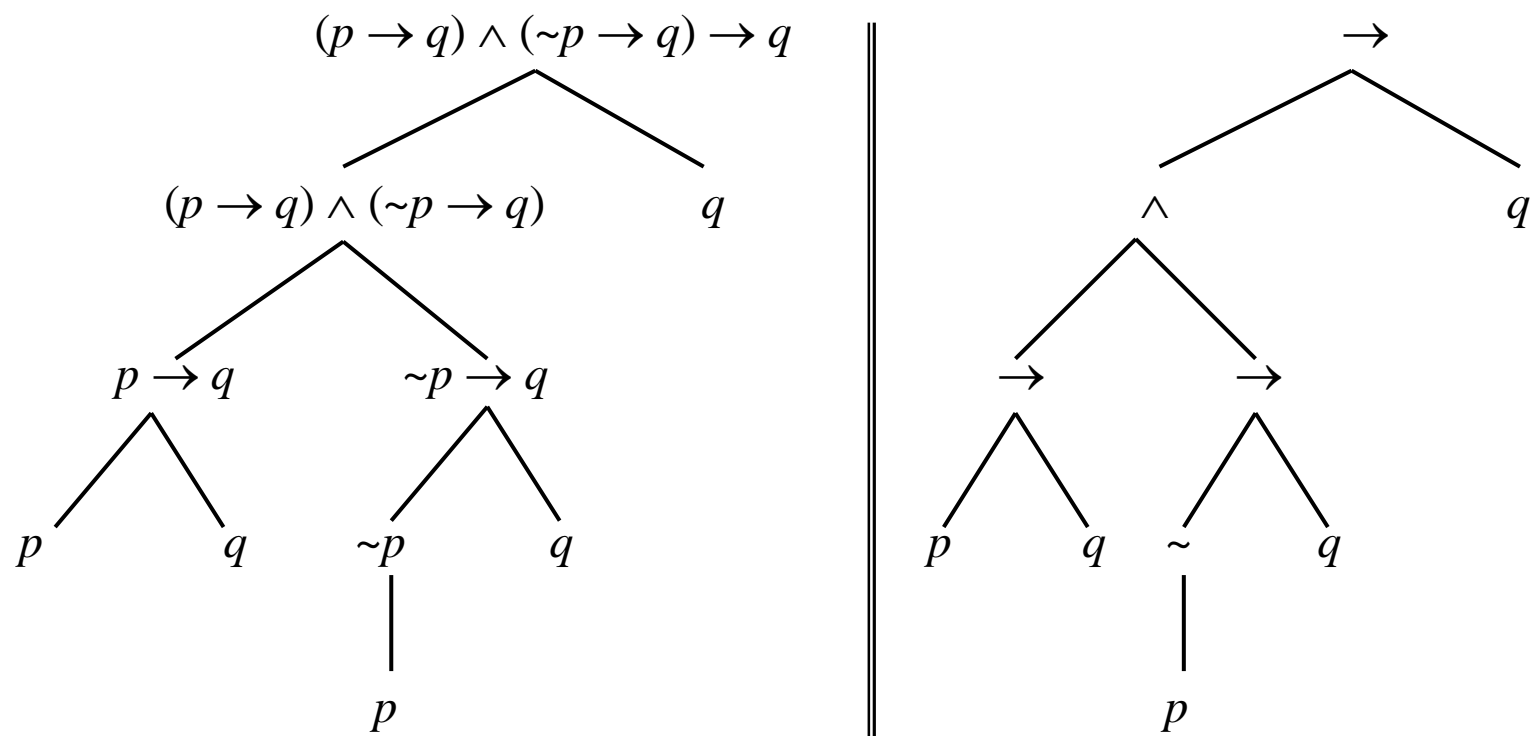
Formułami nie są: $p \sim q$, $p \sim \rightarrow q$, $\sim p \wedge \rightarrow q$, $\vee pq$. ■

DEF. 4 (Podformuła). Dowolną część formuły A , która sama jest formułą nazywamy **podformułą** formuły A . Do podformuł formuły A zaliczamy też samo A .

Przykład: Podformułami formuły $p \rightarrow \sim(q \wedge \sim r)$ są:

$$p, q, r, \sim r, q \wedge \sim r, \sim(q \wedge \sim r), p \rightarrow \sim(q \wedge \sim r). \blacksquare$$

Budowę każdej formuły można zilustrować za pomocą grafu będącego drzewem:



Formuły języka KRZ są schematami zdań jakiegoś języka, np. polskiego. Każda formuła jest schematem nieskończonej klasy zdań. Aby zbudować schemat zdania:

Jeżeli wypowiedziałeś alternatywę, to o ile jeden jej składnik nie jest fałszywy, to wypowiedziałeś zdanie prawdziwe

postępujemy następująco:

- zdania proste zastępujemy zmiennymi zdaniowymi:

Wypowiedziałeś alternatywę – p ,

Jeden jej składnik jest fałszywy – q ,

Wypowiedziałeś zdanie prawdziwe – r .

- spójniki zastępujemy ich symbolami
- i otrzymujemy: $p \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$.

Analogicznie budujemy schemat zdania:

Implikacja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest fałszywy lub następnik jest prawdziwy.

- Zdania proste zastępujemy zmiennymi zdaniowymi:

Implikacja jest prawdziwa – p ,

Jej poprzednik jest fałszywy – q ,

Jej następnik jest prawdziwy – r .

- Spójniki zastępujemy ich symbolami

- i otrzymujemy: $p \equiv q \vee r$

(spójnikiem głównym jest w nim znak \equiv , gdyż – zgodnie z umową – spójnik alternatywy wiąże silniej niż spójnik równoważności).

Schematem zdania:

Jeżeli mówisz nieprawdę, ale czynisz to nieświadomie, to nie kłamiesz

jest:

$p \wedge q \rightarrow \sim r$ (spójnikiem głównym jest implikacja).

Schematem zdania:

Nie potrafisz kontrolować swoich rozumowań wtw nie znasz zasad logiki

jest:

$\sim p \equiv \sim q$.

Schematem zdania:

Jeżeli wygrasz ten proces, to otrzymasz znaczny spadek, a jeśli go przegrasz, to będziesz musiał opłacić znaczne koszty sądowe.

jest:

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$.

Amfibolia to wyrażenie wieloznaczne na skutek swojej niedookreślonej struktury składniowej.

W klasyfikacji Arystotelesa jest ona błędem logicznym mającym swe źródło w mowie.

Schematem zdania:

Skłamię lub powiem prawdę i zostanę ukarany

jest :

$$(p \vee q) \wedge r$$

bądź

$$p \vee (q \wedge r).$$

Stwierdziliśmy wcześniej, że pewne zdania są prawdziwe (fałszywe) z uwagi na swą budowę – zdania analityczne (zdania kontradiktoryczne). Tak jest w przypadku np. zdania:

Nieprawda, że zarazem wątpię i nie wątpię.

Prowadzi to nas do pojęć **tautologii** i **kontrtautologii** KRZ.

DEF. 5 (Tautologia, kontrtautologia).

- (1) **Tautologią KRZ** (albo **prawem logicznym KRZ**) nazywamy formułę języka KRZ, która **przy dowolnej** interpretacji zmiennych zdaniowych zmienia się w **zdanie prawdziwe**.
- (2) **Kontrtautologią KRZ** nazywamy formułę języka KRZ, która **przy dowolnej** interpretacji zmiennych zdaniowych zmienia się w **zdanie fałszywe**.

Innymi słowy, tautologie to schematy zdań wyłącznie prawdziwych, zaś kontrtautologie to schematy zdań wyłącznie fałszywych np. wewnętrznie sprzecznych (negacje tautologii).

Rola tautologii polega na tym, że wykorzystywane one są do określenia niezawodnych reguł wnioskowania. Oto niektóre tautologie.

Tautologie dotyczące zdań sprzecznych:

$p \vee \sim p$	prawo wyłączonego środka (łac. <i>tertium non datur</i>)
$\sim(p \wedge \sim p)$	prawo (nie)sprzeczności
$\sim(p \equiv \sim p)$	prawo nierównoważności sprzeczności
$p \wedge \sim p \rightarrow q$	prawo Dunsza Szkota

Tautologie dotyczące zaprzeczenia:

$\sim\sim p \equiv p$	silne prawo podwójnego przeczenia
$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$	prawo de Morgana negowania koniunkcji
$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$	prawo de Morgana negowania alternatywy
$\sim(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$	prawo negowania implikacji
$\sim(p \equiv q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$	prawo negowania równoważności

Tautologie dotyczące implikacji:

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	prawo sylogizmu hipotetycznego
$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$	<i>modus ponendo ponens</i>
$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$	<i>modus tollendo tollens</i>
$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$	<i>modus tollendo ponens</i>
$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$	prawo transpozycji
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p$	prawo redukcji do absurdu (dylematu destrukcyjnego)

Tautologie dotyczące równoważności:

$(p \equiv q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	prawo rozkładania równoważności
$(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$	prawo obustronnego negowania równoważności

Metoda 0-1. Aby sprawdzić, czy jakaś formuła jest tautologią, nie wystarczy dokonać kolejnych podstawień za zmienne – dla każdej formuły przykładów podstawień jest bowiem nieskończenie wiele. Wystarczy jednak spostrzec, że każda zmienna zdaniowa występująca w formule może uzyskać albo wartość 1, albo wartość 0 (bo każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe). W ten sposób wartość całej formuły jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości przypisane zmiennym zdaniowym. Spostrzeżenie to stanowi podstawę tzw. metody 0-1 rozstrzygania, czy dana formuła jest tautologią.

Kwestia, czy dana formuła jest tautologią jest więc rozstrzygalna, tzn. istnieje algorytm pozwalający w każdym przypadku, po wykonaniu skończonej liczby kroków, odpowiedzieć na pytanie o tautologiczność dowolnej formuły języka KRZ.

Tzw. **skróconą metodę 0-1** można przedstawić w postaci następującego algorytmu:

- (1) Załóż, że badana formuła **nie jest tautologią** (tj. istnieje przyporządkowanie wartości logicznych zmiennym zdaniowym, przy którym przyjmuje ona wartość 0).
- (2) Wnioskując „wstecz” ustal, jakie wartości logiczne musiałyby przybrać zmienne zdaniowe, aby otrzymać wartość 0.
- (3) Wyciągnij wnioski:
 - (a) Jeśli **można** znaleźć przynajmniej jedną kombinację takich wartości logicznych dla zmiennych zdaniowych, to badana formuła **nie jest tautologią**.
 - (b) Jeśli natomiast **nie można** znaleźć kombinacji takich wartości logicznych dla zmiennych zdaniowych (tj. każda próba prowadzi do sprzeczności), to badany schemat **jest tautologią**.

Zdefiniujmy obecnie **relację wynikania logicznego** (konsekwencji semantycznej). Będzie to tzw. implikacyjna koncepcja wynikania. Odwołamy się bowiem do pojęć implikacji i tautologii.

DEF. 6 (Wynikanie logiczne). Z formuł A_1, \dots, A_n **wynika logicznie** formuła B (na gruncie KRZ) wtw implikacja

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$$

jest tautologią KRZ.

Symbolicznie: $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$ wtw $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B) \in \text{Trz}$ (Trz = zbiór tautologii KRZ).

Przypomnijmy, formuły języka KRZ są schematami zdań. Pojęcie wynikania logicznego możemy odnieść więc również do zdań.

Powiemy, że ze zdań o schematach A_1, \dots, A_n wynika logicznie (na gruncie KRZ) zdanie o schemacie B wtw implikacja

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$$

jest tautologią KRZ.

Definicja ta wyraża w pełni intuicję, że ze zdań $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wynika logicznie zdanie β wtw nie jest możliwe, aby zdania $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ były prawdziwe, a zdanie β było fałszywe.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ oraz β będą zdaniami o schematach, odpowiednio, A_1, \dots, A_n oraz B . Aby sprawdzić, czy ze zdań $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, wynika logicznie (na gruncie KRZ) zdanie β , wystarczy sprawdzić, czy implikacja $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ jest tautologią KRZ.

Przykład. 1. Ze zdania:

(α) Jeżeli Zenek jest zakochany, to jest on zazdrosny.

wynika logicznie zdanie:

(β) Jeżeli Zenek nie jest zazdrosny, to nie jest zakochany.

Jest tak, bo

schematem zdania (α) jest formuła: $p \rightarrow q$,

schematem zdania (β) jest formuła: $\sim q \rightarrow \sim p$

oraz implikacja

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

jest tautologią KRZ (prawo transpozycji).

2. Ze zdań:

(α_1) **Winny przestępstwa jest Trąbalski lub Bimbalski.**

(α_2) **Jeżeli Trąbalski nie jest winny, to Bimbalski też nie jest winny.**

wynika semantycznie (logicznie) zdanie:

(β) **Winny przestępstwa jest Trąbalski.**

Jest tak, bo

schematem zdania (α_1) jest formuła: $p \vee q$,

schematem zdania (α_2) jest formuła: $\sim p \rightarrow \sim q$

schematem zdania (β) jest formuła: p

oraz implikacja

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow p$$

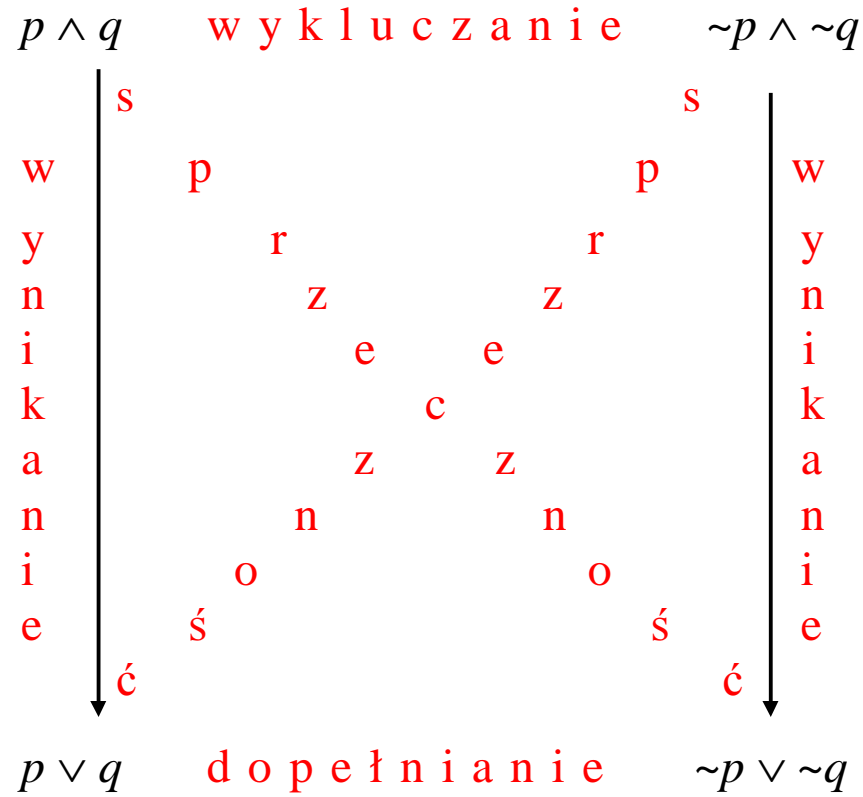
jest tautologią KRZ (stosujemy metodę 0-1). ■

Określmy jeszcze inne stosunki między zdaniami. Niech α i β będą zdaniami o schematach A i B . Powiemy, że:

- Zdania α i β są **logicznie równoważne** wtw formuła $A \equiv B$ jest tautologią.
- Dwa zdania są **wzajemnie sprzeczne** wtw jedno z nich jest negacją drugiego lub jest logicznie równoważne negacji drugiego.
- Zdanie α **wyklucza się** ze zdaniem β wtw ze zdania α wynika logicznie negacja zdania β , czyli formuła $A \rightarrow \sim B$ jest tautologią.
- Zdanie α **dopełnia się** ze zdaniem β wtw z negacji zdania α wynika logicznie zdanie β , czyli formuła $\sim A \rightarrow B$ jest tautologią.

Zauważmy, że:

- Zdania wykluczające się nie mogą być współprawdziwe, chociaż mogą być współfałszywe.
- Zdania dopełniające się nie mogą być współfałszywe, chociaż mogą być współprawdziwe.
- Dwa zdania są (wzajemnie) sprzeczne, gdy zarazem się wykluczają i dopełniają; zdania takie nie mogą być współprawdziwe i współfałszywe.



p : Kłamie

q : Mówię prawdę