Wstęp do logiki

Klasyczny Rachunek Predykatów I

KRZ jest teorią stanowiącą wstępną część logiki formalnej, część zakładaną przez inne teorie. Przypomnijmy, jest on teorią związków logicznych między zdaniami dowolnego języka naturalnego. W centrum swego zainteresowania stawia strukturę formalną zdań złożonych, koncentrując swą uwagę na spójnikach zdaniowych. Zdania proste – składniki zdań złożonych – traktuje jako nierozkładalne dalej atomy. Powoduje to, że w ramach języka KRZ nie można uzasadnić poprawności formalnej wielu wnioskowań, które intuicyjnie uważamy za formalnie poprawne. Przeprowadźmy następujące rozumowanie:

Każdy filozof jest omylny. Sokrates jest filozofem. A zatem, Sokrates jest omylny.

Zastosujmy tu metodę badania niezawodności wnioskowań, opisaną w ramach KRZ.

Schematem pierwszej przesłanki, zapisanym w języku KRZ, będzie zmienna *p*, bo z punktu widzenia KRZ jest to zdanie proste (nie zawiera ona żadnego spójnika); schematem drugiej przesłanki będzie zmienna *q*, a schematem wniosku będzie zmienna *r*. Tak więc, schemat tego wnioskowania ma postać:

$$\frac{p,\ \ q}{r}$$

Łatwo sprawdzić, że nie jest to reguła niezawodna, gdyż formuła: $p \wedge q \rightarrow r$ nie jest tautologią KRZ. Znaczy to, że wniosek nie wynika logicznie z przesłanek. Nasuwa się jednak nieodparte wrażenie, że wnioskowanie to jest formalnie poprawne w tym sensie, iż wniosek wynika logicznie z przesłanek oraz iż opiera się ono na jakieś niezawodnej regule wnioskowania. Rodzi się więc przypuszczenie, że język KRZ jest za mało precyzyjny, by w jego ramach uzasadnić formalną poprawność tego wnioskowania. Przypuszczenie to jest słuszne.

Do pokazania, że rozważane tu wnioskowanie jest formalnie poprawne, niezbędny jest rachunek umożliwiający precyzyjniejszą analizę budowy zdań, mianowicie taki, który pozwoli uwzględnić wewnętrzną budowę zdań prostych. Rachunkiem takim jest rachunek predykatów, zwany też rachunkiem kwantyfikatorów.

Zacznijmy więc od ustalenia, czym jest zdanie proste. Z grubsza rzecz biorąc:

- zdanie proste to wyrażenie przypisujące pewną własność pewnemu przedmiotowi, wskazywanemu za pomocą odpowiedniej nazwy, np. Sokrates jest omylny,

albo

- zdanie proste to wyrażenie opisujące pewien związek (relację) zachodzący miedzy dwoma lub więcej przedmiotami, wskazywanymi przez odpowiednie nazwy, np. Ewa kusi Adama.

Ustalając symbole, które mogą reprezentować nazwy przedmiotów oraz symbole, które mogą reprezentować wyrażenia odnoszące się do własności przedmiotów lub relacji miedzy przedmiotami, możemy każdemu zdaniu prostemu przyporządkować pewna formułę reprezentującą jego formę logiczną. Zacznijmy od zdania:

Ewa kusi Adama.

„Ewa” i „Adam” to nazwy jednostkowe. Są one połączone predykatem „kusi”. Zapiszmy rozważane zdanie tak, aby najpierw występował predykat, a następnie jego argumenty:

Kusi(Ewa, Adam).

Niech

a zastępuje nazwę „Ewa”,

b zastępuje nazwę „Adam”,

K zastępuje predykat „kusi”.

Wobec tego rozważane zdanie można zapisać jako: $K(a, b)$.

Wprowadzając stosowne skróty, można podobnie zapisać inne zdania proste, takie jak:

0 jest liczba naturalną,

a mianowicie

$$N(0)$$

Dygresja. W zdaniu tym wyrażenie „jest liczbą naturalną” jest predykatem 1-argumentowym. Zauważmy, że składa się on z nazwy generalnej „liczba naturalna”, poprzedzonej słowem „jest”. Ogólnie możemy przyjąć, że każdej nazwie generalnej odpowiada pewien predykat 1-argumentowy: nazwie „adwokat” – predykat „jest adwokatem”, nazwie „kwadrat” – predykat „jest kwadratem” itp. W języku rachunku predykatów nazwy są nazwami jednostkowymi, czyli nazwami oznaczającymi tylko jeden przedmiot. ■

Podane tu przykłady nazw (jednostkowych) były to nazwy proste – jednowyrazowe. Przypomnijmy, nazwy języka naturalnego ze względu na budowę dzieli się na proste i złożone. Argumentami predykatów mogą być również nazwy złożone – wielowyrazowe, np.

naiwny Adam,

prezydent RP,

0 + 1.

Nazwy tego typu składają się z pewnej liczby nazw i wyrażenia je łączącego, tzw. wyrażenia funkcyjnego (funktora).

Niech

f zastępuje funktor „naiwny”.

Wobec tego nazwę

naiwny Adam

można zapisać jako

$f(b)$,

zaś zdanie

Ewa kusi naiwnego Adama

można zapisać jako

$K(a, f(b))$.

Dygresja. W języku rachunku predykatów dla oznaczenia wszystkich nazw (zarówno prostych, jak i złożonych) stosuje się techniczny termin: term. Mówiąc dokładniej, term to formuła nazwowa. ■

Weźmy następujące schematy:

x kusi y,

$\log_y x + 0$.

Występujące w tych schematach litery x i y to tzw. zmienne indywiduowe (nazwowe), czyli takie litery, za które można podstawiać jedynie nazwy danego języka. Reprezentują one przedmioty jednostkowe (indywidua) z pewnego ustalonego zbioru, zwanego zakresem zmiennych, np. zbioru ludzi, zbioru liczb (mówimy też że zmienne przebiegają odpowiedni zbiór).

Pierwszy z podanych tu schematów jest formułą zdaniową – po podstawieniu za zmienne nazw otrzymamy zdanie, zaś drugi jest formuła nazwową (czyli termem) – po podstawieniu za zmienne nazw otrzymamy na powrót nazwę.

Formuły zdaniowe, takie jak „x kusi y”. a więc zawierające zmienne, za które można podstawić pewne nazwy określa się mianem funkcji zdaniowych. Funkcje zdaniowe są swego rodzaju równaniami, które spełniają odpowiednie przedmioty. Np. funkcję zdaniową:

$$x > 0$$

spełnia każda liczba większa od zera, i żadna inna.

Dygresja. Dodajmy, że zmiennym nazwowym w języku naturalnym odpowiadają takie wyrażenia, jak coś, ktoś, jakiś itp. Np.

> Jeżeli ktoś pożyczył od kogoś jakiś przedmiot, to jest tego kogoś dłużnikiem.

Można to zapisać symbolicznie następująco:

$$P(x, y, z) \to D(x, y),$$

gdzie litera „P” reprezentuje predykat „pożyczył”, a litera „D” predykat „jest dłużnikiem”. ■

Chcąc przedstawić formę logiczną zdania, które nie zawiera żadnej nazwy (jednostkowej) ustalamy jedynie symboliczna reprezentację predykatów (dbając o to, by różnym predykatom odpowiadały różne symbole). Potrzebne nam będą jeszcze pewne specjalne symbole:

$\forall$ kwantyfikator generalny, który czytamy: dla każdego, dla dowolnego, wszystkie.

$\exists$ kwantyfikator egzystencjalny, który czytamy: istnieje takie, że, dla pewnego.

Dygresja. W literaturze używane są inne jeszcze zapisy kwantyfikatorów. Kwantyfikator generalny (ogólny, duży) zapisywany bywa następująco: $\bigwedge$, (x), a egzystencjalny (szczegółowy, mały) za pomocą symboli $\bigvee$, (Ex). ■

Niech

$L(x)$ reprezentuje: x jest leniwy.

(Zakładamy, że zmienna x przebiega po zbiorze ludzi.)

Wszyscy są leniwi (zdanie ogólnotwierdzące)

$\forall x\ \underbrace{[L(x)]}_{\text{zasięg kwantyfikatora}}$ czytamy: Dla każdego x, x jest leniwy

Niektórzy są leniwi (zdanie szczegółowotwierdzące)

$\exists x\ \underbrace{[L(x)]}_{\text{zasięg kwantyfikatora}}$ czytamy: Istnieje x takie, że x jest leniwy

Nikt nie jest leniwy (zdanie ogólnoprzeczące)

$\forall x\ \underbrace{\sim L(x)}_{\text{zasięg kwantyfikatora}}$ czytamy: Dla każdego x, x nie jest leniwy

Niektórzy nie są leniwi (zdanie szczegółowoprzeczące)

$\exists x\ \underbrace{\sim L(x)}_{\text{zasięg kwantyfikatora}}$ czytamy: Istnieje x takie, że x nie jest leniwy

Rola kwantyfikatora polega na wiązaniu zmiennych. Zmienna związana przez kwantyfikator jest „zmienną pozorną”, za którą nie wolno nic podstawiać.

Formułę występującą w nawiasie (otwartym bezpośrednio po kwantyfikatorze) nazywamy zasięgiem kwantyfikatora. Gdy zasięg kwantyfikatora nie budzi wątpliwości nawiasy możemy pominąć; np. zamiast $\forall x[L(x)]$ można pisać: $\forall x L(x)$.

Niech

$F(x)$ reprezentuje: x jest filozofem;

$L(x)$ reprezentuje: x jest leniwy.

(Zakładamy ponownie, że zmienna x przebiega po zbiorze ludzi.)

Każdy filozof jest leniwy. (zdanie ogólnotwierdzące)

Każdy, kto jest filozofem, jest leniwy.

$F(x) \rightarrow L(x)$ Jeśli x jest filozofem, to x jest leniwy.

$\forall x[F(x) \rightarrow L(x)]$ Dla każdego x, jeśli x jest filozofem, to x jest leniwy.

Pewien filozof jest leniwy. (zdanie szczegółowotwierdzące)

Istnieje ktoś, kto(ś) jest filozofem i jest leniwy.

$F(x) \wedge L(x)$ x jest filozofem i x jest leniwy.

$\exists x[F(x) \wedge L(x)]$ Istnieje x takie, że x jest filozofem i x jest leniwy.

Podobnie w przypadku zdań:

Żaden filozof nie jest leniwy.	$\forall x[F(x) \rightarrow {\sim}L(x)]$	(zdanie ogólnoprzeczące)
Pewien filozof nie jest leniwy.	$\exists x[F(x) \wedge {\sim}L(x)]$	(zdanie szczegółowoprzeczące)
Nie ma leniwych filozofów.	${\sim}\exists x[F(x) \wedge L(x)]$	
Tylko filozofowie są leniwi.	$\forall x[L(x) \rightarrow F(x)]$	

W zdaniach może występować więcej zwrotów kwantyfikujących. Mogą one występować nie tylko na początku wypowiedzi, ale także wewnątrz niej lub na końcu. Weźmy zdania:

Wszystko jest przyczyną wszystkiego.	$\forall x \forall y\, P(x, y)$
Istnieje coś, co jest przyczyną wszystkiego.	$\exists x \forall y\, P(x, y)$
Wszystko ma swoją przyczynę.	$\forall y \exists x\, P(x, y)$
Nic nie jest przyczyną wszystkiego.	$\forall x \forall y\, {\sim}P(x, y)$
Pewien student nie przeczytał żadnej książki.	$\exists x[S(x) \wedge \forall y\, (K(y) \rightarrow {\sim}\, P(x, y))]$

Sposób tworzenia formuł bardziej złożonych z formuł prostszych opisuje następująca tabela:

$\forall x(A)$	Dla każdego x, A
$\exists x(A)$	Istnieje x takie, że A
$\sim(A)$	Nieprawda, że A
$(A) \wedge (B)$	A i B
$(A) \vee (B)$	A lub B
$(A) \rightarrow (B)$	Jeżeli A, to B
$(A) \equiv (B)$	A wtw B

Z semantycznego punktu widzenia, rola kwantyfikatorów polega na stwierdzeniu uniwersalności lub akcydentalności występowania pewnej cechy lub relacji, wskazywanej przez predykat. Najprostsze intuicyjne rozumienie kwantyfikatorów uzyskuje się rozważając kwantyfikatory ograniczone do zbiorów skończonych n-elementowych takich, że każdy element rozważanego zbioru, U, posiada swoją nazwę a_i. Wówczas:

- formuła postaci $\forall x A(x)$ jest równoważna koniunkcji $A(x/a_1) \wedge \ldots \wedge A(x/a_n)$, a
- formuła postaci $\exists x A(x)$ jest równoważna alternatywie $A(x/a_1) \vee \ldots \vee \mathrm{A}(x/a_n)$.

Stąd kwantyfikator generalny nazywa się niekiedy uogólnioną koniunkcją, a kwantyfikator egzystencjalny – uogólnioną alternatywą.

Przykład. $\forall x\, Leniwy(x) \equiv Leniwy(Zenek) \wedge Leniwa(Ziuta) \wedge \ldots$.

$\exists x\, Leniwy(x) \equiv Leniwy(Zenek) \vee Leniwa(Ziuta) \vee \ldots$. ■

Zdanie generalnie skwantyfikowane $\forall x\, A(x)$

- jest prawdziwe, gdy dla każdej nazwy *a* jest tak, jak głosi zdanie $A(x/a)$;
- jest fałszywe, gdy dla co najmniej jednej nazwy *a* nie jest tak, jak głosi zdanie $A(x/a)$.

Z kolei, zdanie egzystencjalnie skwantyfikowane $\exists x\, A(x)$

- jest prawdziwe, gdy dla co najmniej jednej nazwy *a* jest tak, jak głosi zdanie $A(x/a)$;
- jest fałszywe, gdy dla każdej nazwy *a* nie jest tak, jak głosi zdanie $A(x/a)$.

Zagadki. Pewną wyspę zamieszkują tylko rycerze i łotry. Rycerze zawsze mówią prawdę, a łotry zawsze kłamią. Mamy trzy osoby, X, Y i Z, ale tylko dwie z nich wygłaszają zdania (każda z nich jest albo rycerzem, albo łotrem).

(1) X mówi: Wszyscy jesteśmy rycerzami.

Y mówi: Wszyscy jesteśmy łotrami.

Kim są X, Y i Z?

(2) X mówi: Jest wśród nas rycerz.

Y mówi: Jest wśród nas łotr.

Kim są X, Y i Z?

Dygresja historyczna. Kwantyfikatory zostały wprowadzone przez G. Fregego w 1879 r. Jednakże jego praca z uwagi na trudną symbolikę została niezauważona. Około 1885 r. C. S. Peirce wprowadził bardziej czytelne symbole dla kwantyfikatorów i zauważył, że można je traktować, odpowiednio, jako koniunkcję i alternatywę. Rachunek kwantyfikatorów upowszechnili B. Russell i A. N. Whitehead w „Principia Mathematica”. ■